

第二章 测量和测量误差

一、测量的定义与分类

以确定被测量对象量值为目的的全部操作叫做测量，它是物理实验的基础，测量就是用某种实验方法将待测物理量与具有同类标准量级的量具进行定量比较得出结果的过程。比较的结果确定了测量数值的大小，用于比较的标准量确定了测量的单位，进行比较的精确程度确定了测量的准确度。一个完整的测量数据应该由测量数值、单位和准确度几部分组成。

测量对象、测量单位、测量方法和测量准确度通称为测量的四要素，在进行测量前必须先明确这四个要素。

在科学实验中常常会遇到各种类型的测量，如果考虑问题的角度不同，那么对各种类型的测量的分类也不同。例如，根据测量次数的不同，测量可以分为单次测量和多次测量；根据获取数据方式的不同，测量可以分为直接测量和间接测量；根据测量条件不同，测量可以分为等精度测量和非等精度测量。

（1）单次测量和多次测量

有些测量比较简单，随机因素影响很小，测量误差主要来源于仪器并且对该测量结果的准确度要求不是很高，这时只需要进行单次测量。例如，用磅秤去称重或用钢卷尺测窗台的长度，单次测量与多次测量结果几乎一致，为简化操作一般只进行单次测量。

如果测量的随机因素对测量误差有较大影响时，为了减少偶然误差对实验结果影响，则需要采用多次测量，多次测量就是在单次测量的基础上重复进行。

（2）直接测量和间接测量

直接测量是将待测量同作为标准单位的物理量进行比较，直接从仪器或量具上读出量值的大小。如：米尺测量长度，电表测量电压电流，用秒表或数字毫秒计测量时间，用温度计测量温度等。

间接测量是由直接测量测得数据后，利用一定的函数关系经过运算后得到待测量数值。如：测量一长方体物体体积 $V = abh$ ，利用激光测距 $L = ct/2$ ，其中，体积 V 和距离 L 都是间接测量量，长宽高 a 、 b 、 h 和时间 t 是直接测量量。

（3）等精度测量和非等精度测量

等精度测量是指在测量条件（包括测量仪器、测量人员、测量方法及测量环境等）保持不变的情况下，对某一被测量进行多次测量。相反，在测量过程中全部或部分因素导致条件发生改变，则成为非等精度测量也叫不等精度测量。

二、误差的定义与分类

所谓的测量误差就是用测量结果减去被测量的真值，即： $\Delta x = x_{\text{测}} - x_{\text{真}}$ ；它反映的是测量值偏离真值的大小和方向，所谓真值是任何物质（系统）本身具有的或客观存在的真实数值，实际上，真值是一个理想的概念，因为在实际测量中不可避免地会存在误差，即使同一个人用同一台仪器，在相同的条件下进行多次测量，各次的测量结果一般也不会完全相同，更不会刚好等于真值，因此有测量就会伴随存在误差。误差的来源一般可归纳为以下几点：

① 仪器误差

仪器误差是指在测量时由于所用的测量仪器仪表不准确而引起的误差，误差的大小根据仪器本身的准确度来确定，任何仪器都会存在误差。

② 环境误差

环境误差是指由于仪器偏离了仪器本身规定的使用环境或者测量条件所引起的误差。例如，电源电压不稳定，温度不均匀，气流扰动，外界电磁场干扰等等，此类因素都会对测量带来误差。

③ 方法误差

这种误差的产生是由于测量方法的不完善或者所依据的理论不严密而导致，例如，用伏安法测电阻，不管使用外接法还是内接法，测量值总是会比待测电阻的阻值偏小或偏大。

④ 人为误差

这是由于作为实验参与者的主观因素和实验者的感官分辨能力有限而引起的误差，例如，实验者操作不够熟练，实验者长时间进行实验眼睛疲劳导致读数偏差等。

根据以上误差产生的原因以及误差的性质和来源，误差一般可以归结为三大类，即：系统误差、偶然误差和过失（粗大）误差。

（1）系统误差

使用同一种仪器同一测量方法且在相同的实验条件下对某一物体进行多次测量，一般各次的测量值不会完全相同，若每次测量误差的绝对值和符号保持恒定或能以可预知的规律变化，这类误差就称为系统误差。系统误差的特征是其确定性；表现在具体的测量中，它总是使测量结果一致偏大或者一致偏小。

从系统误差产生的原因来看，它的来源主要有仪器的误差，例如电表的零点未在零位、天平的不等臂、秒表指针偏离表盘中心等；环境因素，例如环境的温度或压强偏离实验所需要的标准值；实验方法的不完善或者所依据方法的理论本身具有近似性而带来的理论（方法）误差，例如：伏安法测电阻没有考虑电表内阻的影响、自由落体测加速度没有考虑空气阻力的影响；实验者个人的习惯或偏好，例如：有的人习惯于倾斜的坐姿对指针式电表读数，使得测量值要偏大都偏大要偏小都偏小。

由于系统误差表现出具有一致偏大或一致偏小的特点，因此在同一测量条件下采用多次测量取平均值是不能达到减小或消除的目的；要减小或消除它，必须找出其产生的原因，针对原因采取相应办法或引入修正，具体情况需要给出具体的处理，一般可以遵从以下方法：

1. 从系统误差根源上消除。在测量之前，仔细检查正确调整和安装实验仪器，保证仪器在最佳状态下工作；测量中，尽量防止环境的干扰；记录数据时，选好观测位置尽量避免视差。
2. 在测量系统中采取补偿措施等。如使用分光计测量角度时，因存在偏心差这样的系统误差，故在测量时采用双向读取角度来消除偏心差。
3. 在测量结果中进行修正。当已知系统误差是恒定值时，可以利用恒定值对测量结果直接修正；当系统误差是变值时，可以设法先找出可能存在的变化规律，再利用满足误差变化的公式对其进行修正，达到减小系统误差的目的。

（2）偶然误差

偶然误差又称随机误差，这类误差是指同一量在相同条件下进行多次测量时以不可预知方式变化的测量误差。在实验中系统误差和偶然误差往往是同时存在的，即便采取措施对系统误差进行了修正或消除，但是每次测量值仍然会有差异，当测量次数足够多时，整体的测量值会表现出始终在某个值附近随机起伏，这便是偶然误差；这种误差会使下一次的观测结果偏大还是偏小不能确定，有很明显的随机性。偶然误差是由实验中诸多不确定的因素造成，如环境温度湿度的随机波动、空气的无规则流动、电压不稳定、被测物不均匀性等。根据偶然误差的随机性特点可知，偶然误差就单次测量而言是不不确定的，但其总体服从统计规律，因此可用统计方法估计其对测量的影响。多次测量伴随的偶然误差服从统计中的正态分布，其分布曲线如图 1 所示，概率分布密度函数为：

$$P(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$

其中， σ 为测量列的标准偏差，偶然误差分布具有以下性质：

- ① 单峰性：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大；

- ② 对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相等；
- ③ 有界性：绝对值大的误差出现的概率近与零，误差的绝对值不会超过某一界限；
- ④ 抵偿性：在一定测量条件下，测量值误差的算数平均值随测量次数的增加而趋于零。

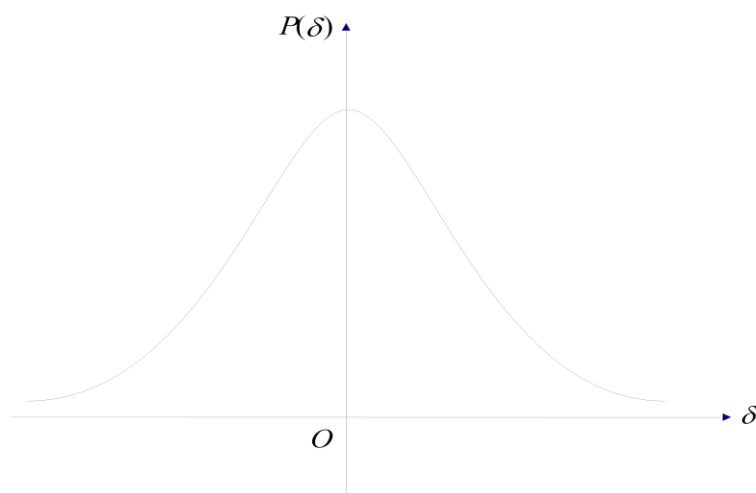


图 1 正态分布曲线

偶然误差产生的因素一般是不确定的，减小偶然误差的方法一般可从以下几点出发：

1. 增加测量次数，由于偶然误差服从统计规律，那么多次测量取平均值是减小偶然误差最有效的办法；
2. 选用稳定性更好的仪器，减少由仪器给实验结果带来的波动；
3. 选择合适的观测时间，在仪器运行较稳定的时刻进行读数。

（3）粗大误差

粗大误差又称过失误差，它是由于测量者主观因素或者由于测量条件突然改变引起的明显与测量结果不符的误差。引起粗大误差的原因有：仪器使用不当、读数错误、记录和计算错误、仪器的突然故障、环境条件不恰当等一系列人为疏忽。在实验中，测量者应避免粗大误差的出现，在处理数据时应首先检验出含有粗大误差的测量值并将其剔除。对于粗大误差，除了设法从测量结果中发现鉴别加以剔除外，更重要的是测量者需具有工作的责任心和以严格的科学态度对待测量工作，此外还要保证测量条件的稳定，应避免在外界条件发生剧烈变化时进行测量。当测量列中出现不能明显鉴别是否具有粗大误差的数据时，往往要根据判别粗大的准则进行判定，常用的有拉易达准则或称

3σ 准则，基本方法是：对于某一多次测量的测量列，若各测得值只含有偶然误差，则根据偶然误差的正态分布规律，需判定的测量值的误差落在 $\pm 3\sigma$ （ σ 是该测量列的标准偏差）以外，则认为它还有粗大误差。

三、评价测量的绝对误差和相对误差

为了评价一个测量结果的好坏，需要使用绝对误差和相对误差来衡量；绝对误差反映了误差本身的大小，而相对误差反映了误差的严重程度。

1. 绝对误差

绝对误差定义：绝对误差 = 测量值 - 真值

2. 相对误差

相对误差定义：相对误差 = $\frac{\text{绝对误差大小}}{\text{真值}} \times 100\%$ ，相对误差需采用百分比的形式进行表示，

所以又称百分比误差。通常需要注意的是，相对误差和绝对误差之间大小没有必然的联系，绝对误差大的，相对误差不一定大。

例如：现测量 A 和 B 两个物体的长度，得到测量结果分别为： $l_A = (25.00 \pm 0.05)mm$ 和 $l_B = (2.50 \pm 0.01)mm$ ；物体 A 的绝对误差 $\Delta_A = 0.05mm$ ，相对误差 $E_A = 0.2\%$ ；物体 B 的绝对误差 $\Delta_B = 0.01mm$ ，相对误差 $E_B = 0.4\%$ ，可以看出物体 A 的绝对误差大于 B 的绝对误差，而 A 的相对误差反而更小。

四、误差的估算及测量结果的表示

1. 单次直接测量

对于单次直接测量，测量值（ $x_{\text{测}}$ ）是测量工具测量待测物理量一次时的读数，单次直接测量的误差（ Δx ）一般以测量仪器的误差（ $\Delta_{\text{仪}}$ ）来评定。单次直接测量的测量结果则应该表示为： $x = (x_{\text{测}} \pm \Delta_{\text{仪}})$ （单位）。例如：用 20 分度的游标卡尺测量某物体长度 l 为 $10.00 mm$ ，那么其测量值 $x_{\text{测}} = 10.00 mm$ ，测量误差 $\Delta x = 0.05 mm$ ；测量结果表示为： $x = (10.00 \pm 0.05) mm$ 。

对于实际使用中的测量仪器，有些仪器标明了误差，那么单次直接测量误差就用仪器标定的误差，对于没有标明误差的仪器，一般用以下方法来确定：

- （1）可取仪器及表盘上最小刻度的一半
- （2）数字仪表取显示表最后位数的一个单位

2. 多次直接测量

为了减小测量的偶然误差，统计理论指出，多次测量的算术平均值 $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ 是用来代替真值的最佳值，因此，在可能的情况下，需要以多次测量的平均值作为多次直接测量测量

结果，它是真值的最好近似。多次直接测量的误差通常使用算术平均绝对误差 Δ_x 或标准偏差 δ_x （方均根偏差）进行估算。

（1）算术平均绝对误差 Δ_x

如果对某一物理量测量 n 次，求得算术平均值为 $\bar{x}$ ，则算术平均绝对误差 Δ_x 为：

$$\Delta_x = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

式中， x_i 表示第 i 次测量值。

（2）标准偏差

根据统计理论，多次测量中产生的误差遵循正态分布，在描述服从正态分布的测量值及随机误差时，应采用算术平均值和标准偏差（方均根偏差）。在有限次测量和被测量真值未知的情况下，测量列的标准偏差可利用贝塞尔公式表示：

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

测量列平均值的标准偏差表示为：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

多次直接测量的测量结果则应该表示为： $x = (\bar{x} \pm \Delta_x)$ （单位）或 $x = (\bar{x} \pm \sigma_x)$ （单位）

例题：用 50 分度游标卡尺测量某物体长度，共测 10 次，测量值分别为：10.06, 10.04, 10.00, 10.02, 10.00, 10.06, 10.06, 10.04, 10.00, 10.00（单位：mm），测量列的测量值为：

$$\bar{x} = \frac{10.06 + 10.04 + 10.00 + 10.02 + 10.00 + 10.06 + 10.06 + 10.04 + 10.00 + 10.00}{10} \approx 10.03 \text{ mm}$$

测量列的算术平均绝对误差：

$$\Delta_x = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_{10} - \bar{x}|}{10} \approx 0.024 \text{ mm}$$

测量列的标准偏差：

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{10} - \bar{x})^2}{9}} \approx 0.027 \text{ mm}$$

测量结果应该表示为： $x = (\bar{x} \pm \Delta_x) = (10.03 \pm 0.02) \text{ mm}$ 或 $x = (\bar{x} \pm \sigma_x) = (10.03 \pm 0.03) \text{ mm}$

3. 间接测量与误差传递

间接测量的测量值是由直接测量值通过已知的函数关系运算得到,由于直接测量是存在误差的,那么间接测量的测量值必定受到直接测量的影响,其结果也一定存在误差,这便是误差的传递。

① 一般误差的传递公式

假设间接测量量 q 与直接测量量 $x, y, z \cdots$ 满足如下函数关系:

$$q = f(x, y, z \cdots) \quad (1.1)$$

根据多元函数的微分方法对 (1.1) 式进行全微分:

$$dq = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz + \cdots \quad (1.2)$$

上式表示,直接测量量有微小变化 $dx, dy, dz \cdots$ 会导致间接测量量 q 受到微小的改变 dq , 这里 $dx, dy, dz \cdots$ 都是小量,故可以将其看作误差,并将 $dx, dy, dz \cdots$ 改写成 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \cdots$, 可以得到算术平均绝对误差传递公式(算术合成法):

$$\Delta_q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \Delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \cdot \Delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \cdot \Delta_z + \cdots \quad (1.3)$$

式中, $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|$ 为误差传递系数; $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ 为直接测量量的误差。

当间接测量函数表达式为和差形式如: $q = x - y + z$, 按 (1.3) 式计算比较方便,但如果间接测量函数表达式为复杂乘除形式如: $q = xz/\sqrt{y}$, 那么在计算误差传递系数时会比较繁琐,这时,我们可以先对 (1.1) 式等式两边取自然对数再进行全微分:

$$\ln q = \ln f(x, y, z \cdots) \quad (1.4)$$

这时算术平均绝对误差传递公式为相对误差形式:

$$\frac{\Delta q}{q} = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x} \right| \cdot \Delta_x + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial y} \right| \cdot \Delta_y + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial z} \right| \cdot \Delta_z + \cdots \quad (1.5)$$

② 标准偏差的传递公式

如果直接测量量 $x, y, z \cdots$ 的误差是采用标准偏差的形式即: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \cdots$, 那么间接测量量的误差应该按方和根的形式合成:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \sigma_z \right)^2 + \cdots} \quad (1.6)$$

如果间接测量式为复杂乘除形式,可以先求得相对标准偏差:

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x} \cdot \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y} \cdot \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z} \cdot \sigma_z \right)^2 + \cdots} \quad (1.7)$$

例题: 一个铅质圆柱体,测得其直径为 $D = \bar{D} \pm \sigma_D = (1.040 \pm 0.003) \text{ cm}$, 高 $h = \bar{h} \pm \sigma_h = (2.120 \pm 0.003) \text{ cm}$, 质量 $m = \bar{m} \pm \sigma_m = (20.43 \pm 0.05) \text{ g}$, 请表示铅的密度 ρ , 密度标准偏差 σ_ρ , 以及测量结果。

解：铅密度： $\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\pi\bar{D}^2\bar{h}} = \frac{4 \times 20.43}{3.142 \times 1.040^2 \times 2.120} \approx 11.34 \text{ g/cm}^3$

铅密度的相对误差： $\frac{\sigma_{\rho}}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} \cdot \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial D} \cdot \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial h} \cdot \sigma_h\right)^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_D}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.05}{20.43}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.003}{1.040}\right)^2 + \left(\frac{0.003}{2.120}\right)^2}$
 $\approx 0.6\%$

铅密度的绝对误差： $\sigma_{\rho} = \bar{\rho} \times 0.6\% \approx 0.07 \text{ g/cm}^3$

铅密度的测量结果： $\rho = \bar{\rho} \pm \sigma_{\rho} = (11.34 \pm 0.07) \text{ g/cm}^3$

五、测量结果的总体评价

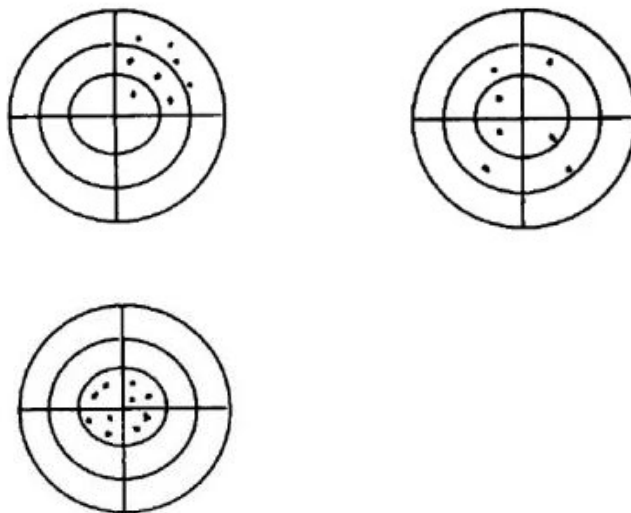
对测量结果进行总体评价时，一般需要将系统误差和偶然误差联系在一起考虑，这便有了测量的精密度、准确度和精确度三个概念，这三个概念在具体的使用中代表着不同的含义。

精密度，是指在相同条件下进行多次重复实验，测量数据的集中程度或复现性的大小，它反映的是多次测量中偶然误差的大小，精密度高表明测量值的重复性好，偶然误差较小。

准确度，是指测量值与真值的符合程度。它能反映误差分量中系统误差的大小，准确度高说明测量值更接近真值，这时系统误差较小。

精确度，是精密度和准确度的综合反映，精确度高表明测量值的都分布在真值附近，此时，系统误差和偶然误差都比较小。如果一个实验中的偶然误差可以小到不计，那么此时的精确度就等于准确度；如果系统误差可以忽略或被完全消除，那么此时的精确度就等于精密度。

为了更形象一点描述精密度、准确度和精确度三者之间关系，下面利用三张射击打靶图来说明，图（A）表示枪手中靶的精密度高；图（B）表示枪手中靶的准确度高；图（C）表示枪手中靶的精确度高。



图(A) 精密度高
度高

图(B) 准确度高

图(C) 精确